

Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematika Emlékverseny LIX. esztendő

2022-2023. tanév

II. forduló Megoldások

9. évfolyam

1. Ha 10 tyúk 6 nap alatt 24 kg búzát eszik meg, s 15 tyúk 8 nap alatt 90 tojást tojik, akkor hány dkg búza kell 1 tojáshoz?

Megoldás

10 tyúk	6 nap alatt	24 kg búzát,
1 tyúk	6 nap alatt	2,4 kg búzát,
1 tyúk	1 nap alatt	0,4 kg búzát eszik meg.
15 tyúk	8 nap alatt	90 tojást,
1 tyúk	8 nap alatt	6 tojást
1 tyúk	1 nap alatt	$\frac{3}{4}$ tojást tojik.

Így 0,4 kg búza kell $\frac{3}{4}$ tojáshoz, vagyis egy tojáshoz kb. $\frac{0,4}{\frac{3}{4}} kg \approx 0,53kg \approx 53 dkg$ búza kell.

2. Hányszorosa az $1 + 2 + 3 + \dots + 2022$ összeg a $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots + 2022$ összegnek?

Megoldás

Az első esetben számpárokat képzünk ($1 + 2022$, $2 + 2021$, $3 + 2020$, stb.) melyek értéke minden esetben 2023. Mivel 1011 számpár van, ezért az első összeg értéke $2023 \cdot 1011$.

A második esetben két-két egymás követő tagot összeadva az összegek ($-1 + 2$; $-3 + 4$, stb.) értéke minden esetben 1 lesz. Mivel 1011 ilyen pár van, ezért a második összeg értéke 1011, vagyis az első összeg 2023-szorosa a másodiknak.

3. Keressük meg az összes olyan $\overline{abcd}$ alakú tízes számrendszerbeli négyjegyű természetes számot, amely számjegyeire igaz, hogy

$$a^2 + b^2 = 10c + 4d + 24 \text{ és } c^2 + d^2 = 4a + 18b - 137$$

Megoldás

Adjuk össze a két egyenletet, így azt kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4a + 18b + 10c + 4d - 113$$

0-ra redukálva, majd teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy

$$(a - 2)^2 + (b - 9)^2 + (c - 5)^2 + (d - 2)^2 = 1$$

A fenti négy szám négyzetének összege pontosan akkor 1, ha 3 értéke 0, s egy értéke 1 vagy -1, így a lehetőségeket táblázatba foglalva az alábbiakat kapjuk:

$a - 2$	$b - 9$	$c - 5$	$d - 2$	a	b	c	d
1	0	0	0	3	9	5	2
-1	0	0	0	1	9	5	2
0	1	0	0	2	10	5	2
0	-1	0	0	2	8	5	2
0	0	1	0	2	9	6	2
0	0	-1	0	2	9	4	2
0	0	0	1	2	9	5	3
0	0	0	-1	2	9	5	1

Mivel a , b , c és d számjegyeket jelöl, így értékük nem lehet 10. A kapott számok (3952, 1952, 2852, 2962, 2942, 2953, 2951) közül egyedül az 1952 felel meg a feladat feltételeinek.

4. Mennyi az $a^4 + b^4$ kifejezés minimuma és maximuma, ha az a és b valós számokra teljesül, hogy $a^2 + b^2 = 8$. Milyen a és b értékek mellett veszi föl a kifejezés minimumát illetve maximumát?

Megoldás

A feltételből $b^2 = 8 - a^2$, amit a kifejezésbe helyettesítünk. Így a következőt kapjuk:

$$a^4 + b^4 = a^4 + (8 - a^2)^2 = 2a^4 - 16a^2 + 64 = 2[a^4 - 8a^2 + 32] = 2(a^2 - 4)^2 + 32 \geq 32.$$

Tehát a kifejezés minimuma 32.

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a^2 - 4 = 0$, azaz $a = 2$ vagy $a = -2$. Mindkét lehetséges a értékhez tartozó b értéke 2 vagy -2, vagyis a kifejezés a $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$, $(-2; -2)$ $(a; b)$ rendezett számpárok esetén veszi föl minimumát.

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 64 - 2a^2b^2 \leq 64$. Tehát a kifejezés maximuma 64.

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $2a^2b^2 = 2a^2(8 - a^2) = 0$, azaz ha $a = 0$, vagy $a = \sqrt{8}$, vagy $a = -\sqrt{8}$. Ezen a értékekhez rendre a következő b értékek tartoznak: $\pm\sqrt{8}$, 0 és 0, vagyis a kifejezés a $(0; \sqrt{8})$, $(0; -\sqrt{8})$, $(\sqrt{8}; 0)$, $(-\sqrt{8}; 0)$ $(a; b)$ rendezett számpárok esetén veszi föl maximumát.

5. Egy ABC háromszög magasságaira teljesül, hogy kettő-kettő összegének aránya $27 : 32 : 35$. Hogyan aránylanak egymáshoz a háromszög oldalai?

Megoldás

Legyen a háromszög a , b és c oldalához tartozó magasság rendre m_a , m_b és m_c . Ekkor

$$(m_a + m_b) : (m_b + m_c) : (m_c + m_a) = 27 : 32 : 35.$$

Legyen $m_a + m_b = 27x$; $m_b + m_c = 32x$; $m_c + m_a = 35x$.

E három egyenlet összegét 2-vel osztva kapjuk, hogy $m_a + m_b + m_c = 47x$, ahonnan

$$m_a = 15x, m_b = 12x, m_c = 20x.$$

Mivel a háromszög területe egy oldal és az oldalhoz tartozó magasság szorzatának fele,

$$\text{ezért } \frac{a \cdot 15x}{2} = \frac{b \cdot 12x}{2} = \frac{c \cdot 20x}{2}.$$

$$\text{Innen } \frac{a}{b} = \frac{12}{15} = \frac{48}{60}, \frac{b}{c} = \frac{20}{12} = \frac{60}{36},$$

vagyis a három oldal aránya $a : b : c = 48 : 60 : 36 = 4 : 5 : 3$.

6. Mely valós számok halmazán értelmezett elsőfokú f függvényre igaz, hogy

$$5f(x) + f(2 - x) = 12x + 36 ?$$

1. Megoldás

Mivel f elsőfokú függvény, így a megoldást $f(x) = ax + b$ alakban keressük. Ekkor $f(2 - x) = a(2 - x) + b = -ax + 2a + b$.

A feladat feltételének megfelelően:

$$5f(x) + f(2 - x) = 5ax + 5b - ax + 2a + b = 4ax + 2a + 6b = 12x + 36$$

Mivel ez a feltétel minden $x \in \mathbb{R}$ -re igaz, így helyettesítsünk be x helyére konkrét értékeket.

Ha $x = 0$, akkor $2a + 6b = 36$. (1.)

Ha $x = 1$, akkor $4a + 2a + 6b = 12 + 36$, azaz $6a + 6b = 48$. (2.)

Az (1.) és (2.) egyenletekből alkotott egyenletrendszer megoldása $a = 3$, $b = 5$, vagyis a feladat feltételének eleget tevő függvény a következő:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 3x + 5.$$

2. Megoldás

Helyettesítsünk x helyére $2 - x$ -et.

Ekkor a feladat feltétele a következőképp alakul: $5f(2 - x) + f(2 - 2 + x) = 12(2 - x) + 36$, azaz $5f(2 - x) + f(x) = -12x + 60$.

Megoldjuk az

$$5f(x) + f(2 - x) = 12x + 36 \quad (1.)$$

$$5f(2 - x) + f(x) = -12x + 60 \quad (2.)$$

egyenletekből alkotott egyenletrendszert.

(2.)-ből (1.) 5-szörösét kivonva kapjuk, hogy $-24f(x) = -72x - 120$, melyet (-24)-gyel osztva kapjuk, hogy $f(x) = 3x + 5$, ami a feladat feltételének megfelelő elsőfokú függvény.

10. évfolyam

1. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$(3 - x) \cdot (x^2 - 1) \cdot (|x + 2| - 2) > 0$$

Megoldás

Készítsünk előjeltáblázatot az $f(x) = 3 - x$, $g(x) = x^2 - 1$, $h(x) = |x + 2| - 2$ és az $f \cdot g \cdot h(x)$ függvényekhez!

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$f(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-
$g(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$h(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+
$fgh(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-

A táblázatból leolvasható, hogy a szorzatfüggvény a $]-\infty; 4[\cup]-1; 0[\cup]1; 3[$ intervallumon vesz föl pozitív értéket, s ez az intervallum az egyenlőtlenség megoldása.

2. Mely egész x értékek esetén lesz az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 3x^2 + 5x - 2$ függvény helyettesítési értéke prímszám?

Megoldás

Alakítsuk a másodfokú kifejezést szorzattá!

$$f(x) = 3x^2 + 7x + 2 = (3x + 1)(x + 2).$$

E kifejezés értéke csak úgy lehet prímszám, ha az egyik tényező értéke 1 vagy -1, s a másik tényező értéke egy prímszám, vagy egy pozitív prímszám (-1)-szerese.

Ha $3x + 1 = 1$, akkor $x = 0$, s $f(0) = 2$.

Ha $3x + 1 = -1$, akkor $x = -\frac{2}{3}$, s $f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$.

Ha $x + 2 = 1$, akkor $x = -1$, s $f(-1) = -2$.

Ha $x + 2 = -1$, akkor $x = -3$, s $f(-3) = 8$.

Így a függvény egyedül az $x = 0$ helyen vesz föl prímszám értéket.

3. Hány megoldása van az $a + b + c + d + e = 60$ egyenletnek a rendezett természetes számötösök ($\mathbb{N}^5$) halmazán, amelyekre teljesül, hogy $a > 6$, $b > 8$, $c > 10$, $d > 12$ és $e > 14$.

Megoldás

Mivel a, b, c, d és e egész számok, így a róluk adott feltétel átfogalmazható úgy, hogy

$$a \geq 7, b \geq 9, c \geq 11, d \geq 13, e \geq 15.$$

Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon

$$(a - 7) + (b - 9) + (c - 11) + (d - 13) + (e - 15) = 5,$$

s vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$a - 7 = x, b - 9 = y, c - 11 = z, d - 13 = u \text{ és } e - 15 = v.$$

Így az eredeti egyenletünk a következő alakot ölti: $x + y + z + u + v = 5$,

s eredeti feladatunk pedig a következő kérdéssel ekvivalens: hányféleképpen tudjuk előállítani az 5-t öt természetes szám összegeként.

1. Megoldás

- Az öt ismeretlenből az egyik értéke 5, a másik négyé 0, ami 5-féleképpen lehetséges.
- Az öt ismeretlenből egyik értéke 4, egyiké 1, a másik háromé 0, ami $\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = 20$ -féleképpen lehetséges.
- Az öt ismeretlenből egyik értéke 3, kettőé 1, kettőé 0, ami $\frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 2!} = 30$ -féleképpen lehetséges.
- Az öt ismeretlenből egyik értéke 3, egyiké 2, háromé 0, ami $\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = 20$ -féleképpen lehetséges.
- Az öt ismeretlenből kettő értéke 2, egyiké 1, kettőé 0, ami $\frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} = 30$ -féleképpen lehetséges.
- Az öt ismeretlenből egyik értéke 2, háromé 1, egyiké 0, ami $\frac{5!}{1! \cdot 3! \cdot 1!} = 20$ -féleképpen lehetséges.
- Mind az öt ismeretlen értéke 1, ami 1-féleképpen lehetséges.

Ez összesen $5 + 20 + 30 + 20 + 30 + 20 + 1 = 126$ lehetőség.

2. Megoldás

Az öt ismeretlent négy vonallal válasszuk el, s válasszuk mindegyik értékéül 0-t.

Amelyik értékéhez 1-et szeretnénk adni, oda írjunk egy o-t, így a vonalak és o-k sorrendje megadja az összes lehetőséget. Például

x	y	z	u	v
o o		o		o o

ami az $x = 2, y = 0, z = 1, u = 0, v = 2$ lehetőségnek felel meg.

4 vonal és 5 o lehetséges sorrendje $\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = 126$.

3. Hasonlóságtól eltekintve hány olyan derékszögű háromszög létezik, amely oldalainak hossza cm-ben mérve egész, valamint területének és kerületének cm^2 -ben és cm-ben vett mérőszáma megegyezik?

Megoldás

Használjuk a háromszög beírható körének sugarát tartalmazó területképletét, így a feladat feltétele az alábbi módon formalizálható: $r \cdot s = 2s$ (ahol r a háromszög beírt körének sugara, s pedig a félkerület).

Innen s -sel leosztva (mivel $s > 0$) kapjuk, hogy $r = 2$.

Az ABC C-ben derékszögű háromszög oldalai így $AC = x + 2, BC = y + 2, AB = x + y$ alakban írhatók ($x, y \in \mathbb{Z}^+$), melyekre a Pitagorasz-tétel alapján igaz, hogy

$$(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = (x + y)^2$$

Innen $4x + 4y + 8 = 2xy$

amit 2-vel leosztva, 0-ra redukálva és szorzattá alakítva kapunk, hogy

$$(x - 2)(y - 2) = 8$$

Mivel x és y pozitív egészeket jelöl (s szerepük fölcserélhető), így azt vizsgáljuk meg, hogy hányféleképp tudjuk 8-at két egész szám szorzataként előállítani.

- ha $x - 2 = 1$ és $y - 2 = 8$, akkor $x = 3, y = 10$ azaz $AC = 5, BC = 12, AB = 13$
- ha $x - 2 = 2$ és $y - 2 = 4$, akkor $x = 4, y = 6$, azaz $AC = 6, BC = 8, AB = 10$.

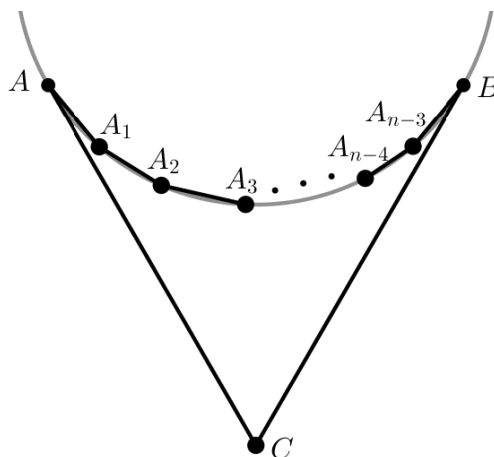
4. Legfeljebb hány homorúsöge lehet egy n ($n \geq 4$) oldalú sokszögnek?

Megoldás

Mivel minden n oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$, ezért $n - 2$ homorúsöge nem lehet a sokszögnek, mivel ezek összege önmagában nagyobb $(n - 2) \cdot 180^\circ$ -nál.

Megmutatjuk, hogy bármely $n > 3$ esetén tudunk $n - 3$ homorúsöget tartalmazó n oldalú sokszöget konstruálni.

Egy körhöz külső pontból húzzunk érintőszakaszokat. A két érintési pont közötti rövidebb köríven vegyünk föl $n - 3$ pontot, melyet a meglévő két érintési ponttal és a külső ponttal összekötve n oldalú konkáv sokszöget kapunk. A köríven fölvetett $n - 3$ pontnál a sokszögnek homorúsögei vannak, így valóban bármely $n > 3$ esetén létezik n oldalú sokszög, melynek $n - 3$ homorúsöge van.



5. Az iskolai játéklklub tanév végi sakkbajnokságán induló lány és fiú tanulók aránya 1 : 2. Mindenki mindenkivel pontosan egy partit játszott, s egyik parti sem ért döntetlennel véget. Hány fiú és hány lány indult a bajnokságon, ha a lányok és a fiúk által megnyert partik száma úgy aránylik egymáshoz (ebben a sorrendben), mint 4 : 3?

Megoldás

Legyen a lányok száma n , ekkor a fiúk száma $2n$ (ahol $n \in \mathbb{N}$). Lány lány ellen $\frac{n(n-1)}{2}$ mérkőzést játszott, s itt minden mérkőzést lány nyert. Fiú fiú ellen $\frac{2n(2n-1)}{2}$ mérkőzést játszott, s itt minden mérkőzést fiú nyert. Lány fiú ellen $n \cdot 2n = 2n^2$ mérkőzést játszott. Az ezek közül lány által megnyertek száma legyen N (vagyis $N \leq 2n^2$), vagyis a fiú által itt megnyert mérkőzések száma $2n^2 - N$. Így a lányok összesen $\frac{n(n-1)}{2} + N$, a fiúk összesen $\frac{2n(2n-1)}{2} + 2n^2 - N$ mérkőzést nyertek. Ezek aránya

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} + N}{\frac{2n(2n-1)}{2} + 2n^2 - N} = \frac{4}{3}$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy $N = \frac{29n^2 - 5n}{14}$.

Mivel $N \leq 2n^2$ ezért $\frac{29n^2 - 5n}{14} \leq 2n^2$, ahonnan

$$n^2 - 5n \leq 0$$

Az egyenlőtlenség pozitív egész megoldásai 1, 2, 3, 4, 5.

Az 1, 2, 3, 4 esetén N nem egész.

Ha $n = 5$, akkor $N = 50$. Ebben az esetben 5 lány és 10 fiú volt. A lányok összesen 60 mérkőzést nyertek (a lány-lány mérkőzéseknél 10-et a lány-fiú mérkőzéseknél mind az 50-et). A fiúk a maradék 45 mérkőzést nyerték, s valóban $60 : 45 = 4 : 3$.

11. évfolyam

1. Hány olyan pozitív egész szám van, amely osztható 30-cal, s pozitív osztóinak száma 30?

Megoldás

Mivel a szám osztható 30-cal, ezért prímtényezős felbontása tartalmaz 2-öt, 3-at és 5-öt is.

Mivel a $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ prímtényezős felbontású számok pozitív osztóinak száma $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$, s $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a keresett számok $2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3}$ alakúak k_1, k_2, k_3 értéke $(2 - 1 =)1, (3 - 1 =)2$ és $(5 - 1 =)4$ valamilyen sorrendben. E három különböző elem lehetséges sorrendje $3! = 6$, azaz 6 ilyen tulajdonságú szám van. (Ezek a következők: $2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^4$; $2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^2$; $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^4$; $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^1$; $2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^2$; $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$)

2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2^{|x^{\log_3 x + 2} - 27|} = 1$$

Megoldás

$$2^{|x^{\log_3 x + 2} - 27|} = 2^0 \quad (\text{mivel az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelmű})$$

$$|x^{\log_3 x + 2} - 27| = 0 \quad (\text{mivel egy szám abszolútértéke pontosan akkor 0, ha maga a szám a 0})$$

$$x^{\log_3 x + 2} - 27 = 0$$

$$x^{\log_3 x + 2} = 27 \quad (\text{mivel a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű})$$

$$\log_3(x^{\log_3 x + 2}) = \log_3 27$$

$$(\log_3 x + 2) \cdot \log_3 x = 3$$

ami egy $\log_3 x$ -ben másodfokú egyenlet, így $\log_3 x = 1$ vagy $\log_3 x = -3$, ahonnan $x = 3$ vagy

$$x = \frac{1}{27}.$$

Behelyettesítve megkapjuk, hogy mindkét megoldás kielégíti az eredeti egyenletet.

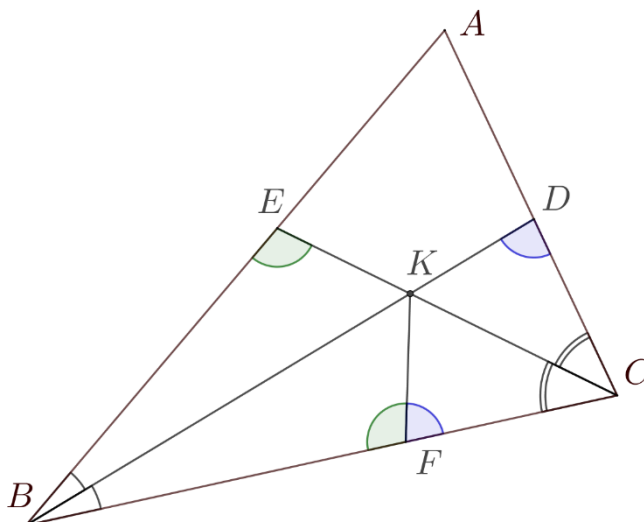
3. Az ABC háromszög B csúcsából induló szögfelezője az AC oldalt D , a C csúcsából induló szögfelezője az AB oldalt E pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogyha $BE + CD = BC$, akkor $AEKD$ húrnégyszög (ahol K a háromszög birt körének középpontja).

Megoldás

Mérjük fel a BE távolságot B -ből a BC szakaszra, a kapott pont F . Ekkor $EBK\Delta \sim FBK\Delta$, hiszen $BE = BF$, BK közös oldaluk és $EBK\angle = FBK\angle$.

Ezért $BEK\angle = BFK\angle$. Hasonlóan belátható, hogy $CDK\angle = CFK\angle$.

$BFK\angle$ és $CFK\angle$ 180° -ra egészítik ki egymást, így az előzők alapján igaz az is, hogy $BEK\angle + CDK\angle = 180^\circ$.



Ekkor, ez a kiegészítő szögek összegére is igaz, tehát $AEK\angle + ADK\angle = 180^\circ$, amiből következik, hogy $AEKD$ húrnégyszög.

4. Bizonyítsuk be, hogy az $x! + y!$ összeg nem írható fel másképpen két pozitív szám faktoriálisának összegeként.

Megoldás

A bizonyítást indirekt úton végezzük.

Tételezzük föl, hogy $x! + y! = a! + b!$ ($x, y, a, b \in \mathbb{Z}^+$)

Legyen $x \geq y, a \geq b$, valamint $x > a$.

Ekkor $x! + y! \geq (a+1)! + 1 = (a+1)a! + 1 \geq 2a! + 1 > 2a! \geq a! + b!$, ahonnan

$$x! + y! > a! + b!$$

Hasonlóan ellentmondásra jutunk akkor is, ha fölteszük, $x < a$.

Mivel ellentmondásra jutottunk, ezért hamis a föltevésünk, vagyis egy pozitív egész szám nem írható föl kétféleképpen két pozitív szám faktoriálisának összegeként.

5. Tekintsük az alábbi egyenletet, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Mennyi $a + b + c$ maximális értéke, ha az egyenlet három pozitív valós megoldására igaz, hogy $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ és $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8$?

Megoldás

Számtani és mértani közepek közötti összefüggés alapján:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$$

Behelyettesítve az összeg és a szorzat értékeit, az látható, hogy a két közép egyenlő:

$$2 = \frac{6}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Egyenlőség esete pontosan akkor áll fent, ha $x_1 = x_2 = x_3$, ami azt jelenti, hogy $x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

Az egyenletben szereplő polinom főegyütthatója 1, mindhárom gyöke 2, így gyöktényezős alakja a következőképpen írható fel:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - 2)^3.$$

Jobb oldalt elvégezve a hatványozást, a megfelelő együtthatók egyenlőségéből meghatározhatók a paraméterek értékei.

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$a = -6, b = 12, c = -8$$

$a + b + c$ értéke állandó, így maximális értéke is $-6 + 12 + (-8) = -2$.

6. Adjuk meg az összes olyan n és k természetes számot, amely kielégíti az $\binom{n}{k} = n + k$ egyenletet!

Megoldás

Ha $k = 0$, akkor $\binom{n}{0} = n + 0$, s mivel $\binom{n}{0} = 1$, így $n = 1$.

Ha $k = 1$, akkor $\binom{n}{1} = n + 1$, s mivel $\binom{n}{1} = n$, így $n = n + 1$ egyenletet kapjuk, ami ellentmondásra vezet.

Ha $k = n$, akkor $\binom{n}{n} = n + n$, s mivel $\binom{n}{n} = 1$, így $2n = 1$, ahonnan $n = 0,5$, ami nem természetes szám.

Ha $k = n - 1$, akkor $\binom{n}{n-1} = n + n - 1$, s mivel $\binom{n}{n-1} = n$, így $n = 2n - 1$, ahonnan $n = 1$, de innen mivel $k = n - 1 = 0$, már ismert esetet kapjuk.

Ha $2 \leq k \leq n - 2$ ($n \geq 4$), akkor $\binom{n}{2} \leq \binom{n}{k} = n + k \leq 2n$, azaz $\binom{n}{2} \leq 2n$, így $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2n$.

Utóbbit n -nel leosztva ($n > 0$) kapjuk, hogy $\frac{n-1}{2} \leq 2$, azaz $n \leq 5$.

Ha $n = 4$, akkor $k = 2$, s valóban $\binom{4}{2} = 4 + 2 = 6$

Ha $n = 5$, akkor $k = 2$ és $k = 3$ esetén is ellentmondást kapunk.

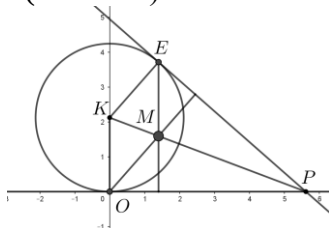
Így a feladat feltételének a $k = 0$ és $n = 1$, valamint a $k = 2$ és $n = 4$ számpárok tesznek eleget.

12. évfolyam

1. Adott az $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ egyenletű kör, ahol a pozitív valós szám. Az x tengely tetszőleges $P(x; 0)$ pontján keresztül felvesszük a kör x tengelytől különböző érintőjét. Ennek az érintőnek a körrel vett érintési pontját jelölje E . Adjuk meg az OPE háromszögek magasságpontjainak halmazát, ha P befutja az x tengelyt, O pedig az origót jelöli.

Megoldás

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségéből következik, hogy $OP = PE$, azaz az OPE háromszög egyenlő szárú. Ezért P -ből induló magassága illeszkedik a KP egyenesre, és felezi az OE szakaszt (lásd ábra).



Ha M jelöli az OPE háromszög magasságpontját, akkor OM párhuzamos KE -vel és OK párhuzamos ME -vel. Figyelembe véve még, hogy $OK = KE$, kapjuk, hogy az $OMEK$ négyszög rombusz. Ebből viszont következik, hogy P helyzetétől függetlenül az $OM = a$ távolság állandó, azaz M állandó távolságra van az origótól. Az M pontok tehát egy origó középpontú, a sugarú félkörön helyezkednek el, melynek az y tengelyen található végpontjai nem tartoznak a ponthalmazhoz.

2. Az $ax^2 + bx + c > 0$ egyenlőtlenség pontosan azokra a valós x értékekre teljesül, amelyekre $1 < x < 2$. Mely valós x értékekre teljesül a $cx^2 + bx + a < 0$ egyenlőtlenség?

Megoldás

A feltételből következik, hogy $a < 0$, így az $ax^2 + bx + c > 0$ egyenlőtlenség ekvivalens az $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$ egyenlőtlenséggel. A feltétel szerint

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0.$$

Kapjuk tehát, hogy $b = -3a$ és $c = 2a$. Ezzel a második egyenlőtlenség

$$cx^2 + bx + a < 0 \Leftrightarrow a(2x^2 - 3x + 1) < 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) > 0.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $x < \frac{1}{2}$ vagy $1 < x$.

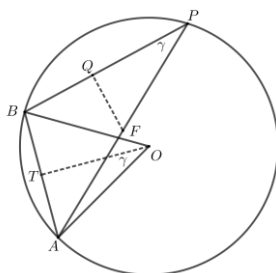
3. Egy körvonal P pontjából felvettük a PA és PB húrokat úgy, hogy $PA = 18$ cm és $PB = 12$ cm. A PA húr F felezőpontjának a PB egyenesestől mért távolsága 2 cm. Mekkora a kör sugara?

Megoldás

Legyen F a PA húr felezési pontja, Q pedig az F -ből a PB húrra bocsátott merőleges talppontja. Jelölje T a kör középpontjából az AB húrra állított merőleges talppontját, γ pedig az APB szöget.

Az ismert adatok alapján $\sin \gamma = \frac{2}{9}$. γ mértékétől függően kétféle elrendezés lehetséges.

1. Ha γ hegyesszög (1. ábra), akkor $\cos \gamma = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = \frac{\sqrt{77}}{9}$.



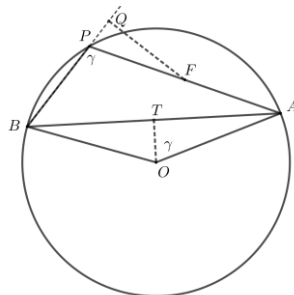
1. ábra

Az APB háromszögre a koszinusztétel: $AB^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos \gamma \approx 46,8$, ahonnan $AB \approx 6,84$.

Az azonos ívhez tartozó kerületi és középponti szögekre vonatkozó tétel értelmében

$\angle APB = \angle AOT = \gamma$. Ha r_1 a kör sugara, akkor $r_1 = \frac{AB}{2 \sin \gamma} \approx \frac{6,84}{2 \cdot \frac{2}{9}} \approx 15,4$ (cm).

2. Ha γ tompaszög (2. ábra), akkor $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma = -\frac{\sqrt{77}}{9}$.



2. ábra

Az APB háromszögre a koszinusztétel: $AB^2 = 12^2 + 18^2 - 2 \cdot 12 \cdot 18 \cdot \cos(180^\circ - \gamma) \approx 889,2$, ahonnan $AB \approx 29,8$.

Az előző esethez hasonlóan most is a kerületi és középponti szögek tételét alkalmazva kapjuk

a kör r_2 sugarára: $r_2 = \frac{AB}{2 \sin \gamma} \approx \frac{29,8}{2 \cdot \frac{2}{9}} \approx 67,05$ (cm).

4. Mely pozitív egész n esetén lesz az $n^2 + 19n + 48$ kifejezés értéke négyzetszám (egy egész szám négyzete)?

Megoldás

Keressük azokat az n és m pozitív egész számokat, amelyekre $n^2 + 19n + 48 = m^2$.

Annak érdekében, hogy a megfelelő algebrai átalakításokat (teljes négyzetté kiegészítés) egész együtthatókkal tudjuk elvégezni, szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát 4-gyel.

$$4n^2 + 76n + 192 = 4m^2$$

Teljes négyzetté kiegészítés és rendezés után

$$(2n+19)^2 - (2m)^2 = 169,$$

ahonnan

$$(2n - 2m + 19)(2n + 2m + 19) = 13^2 = 1 \cdot 169 = 13 \cdot 13.$$

Ha $2n - m + 19 = 1$, akkor $2n + m + 19 = 169$. Innen $m = 42$, $n = 33$, ami valóban megoldás.

A másik esetben $m = 0$ adódna, ami pozitív egész n esetén lehetetlen.

A feladat egyetlen megoldása: $n = 33$.

5. Hat darab méretre és alakra egyforma korong közül egy piros, kettő sárga, három kék. Hányféleképpen rakhatók sorba úgy, hogy ne kerüljön egymás mellé két azonos színű korong?

Megoldás

10 megfelelő sorrend van, ami szisztematikusan fel is sorolható, de többféleképpen össze is számolható.

6. Az $ABCD$ tetraéder négy lapjának területe rendre $T_A; T_B; T_C; T_D$, ahol az indexbe írt betű jelöli, hogy melyik csúccsal van szemben a tekintett lap. Az A, B, C, D csúcsokból induló testmagasságok rendre $m_A; m_B; m_C; m_D$. Bizonyítsuk be, hogy ha V a tetraéder térfogata, akkor

$$(T_A + T_B + T_C + T_D) \cdot (m_A + m_B + m_C + m_D) \geq 48 \cdot V.$$

(A hosszúság, terület és térfogat mértékegységei egymásnak megfelelőek.)

Megoldás

A megoldás során felhasználjuk, hogy

$$T_A \cdot m_A = T_B \cdot m_B = T_C \cdot m_C = T_D \cdot m_D = 3 \cdot V. \quad (1)$$

Elvégezve az egyenlőtlenség bal oldalán levő szorzást 16 tagot kapunk. Ebből (1) alapján négy tag összege $12V$. A maradék tizenkét tagot hat $(T_A m_B; T_B m_A)$ típusú párba osztjuk. Becsüljük alulról az egy párba tartozók összegét (1), valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alkalmazásával.

$$T_A m_B + T_B m_A = T_A \cdot \frac{T_A m_A}{T_B} + T_B m_A = \frac{m_A}{T_B} \cdot (T_A^2 + T_B^2) \geq \frac{m_A}{T_B} \cdot 2T_A T_B = 6V \quad (2)$$

Hat ilyen pár van, így a megfelelő tagok összege legalább $36V$. Ezt összevetve a megfelelő területek és magasságok szorzatának összegével a bizonyítandó állítást kapjuk.

A (2) becslés alapján látható, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a tetraéder lapjai páronként egyenlő területűek.